

VEROVATNOĆA GREŠKE PRI PRENOSU MPSK SIGNALA KROZ GAUSSOV KANAL U PRISUSTVU KANALNE INTERFERENCIJE

Goran T. Đorđević¹, Milan S. Milošević¹, Milan S. Marković², Dragiša Č. Zlatković³

¹Elektronski fakultet u Nišu

²INTEL-CO d.o.o, Novi Sad

³Viša tehnička škola u Nišu

1. UVOD

Kod različitih tipova digitalnih modulacija brzina prenosa informacija se može efikasno povećati ako se usvoje više od dva elementarna signala, tako da su višenivoski (broj nivoa je označen sa M) tipovi modulacija postali standardi u mnogim telekomunikacionim sistemima, [1-6].

U [1-2] su određene veze između prave i približne vrednosti verovatnoće greške po bitu, (približna vrednost je dobijena na taj način što je verovatnoća greške po simbolu podeljena sa brojem bita kojima se koduje jedan simbol), u slučaju prenosa višenivoskih FSK (frequency shift-keying) i DPSK (differential phase-shift keying) signala kroz Gaussov kanal u prisustvu Riceovog i Rayleighovog fedinga. U [3] je prikazan postupak za određivanje verovatnoće greške po bitu pri prenosu MPSK ($M \geq 2$) i MQAM (quadrature amplitude modulation) signala kroz Gaussov kanal.

U ovom radu je dat analitički postupak za određivanje tačne vrednosti verovatnoće greške po bitu pri detekciji višenivoskog fazno-modulisiranog signala koji se prostire kroz Gaussov kanal, uzimajući u obzir negativan uticaj kanalne interferencije koja se javlja na ulazu u prijemnik. Ova kanalna interferencija je modelovana pomoću sinusoide konstantne amplitude i slučajne faze uniformno raspodeljene u poluintervalu $(-\pi, \pi]$; a njena noseća učestanost je ista kao i noseća učestanost korisnog signala, [4-5]. Na osnovu izvedenih analitičkih izraza dobijeni su numerički rezultati i prikazane su zavisnosti verovatnoće greške po bitu P_b od odnosa energija signala po bitu/spektralna gustina snage šuma E_b/N_0 za različite vrednosti odnosa signal/interferencija SIR i broja nivoa M . Izvršeno je poređenje ovih rezultata sa približnim rezultatima i izračunata je relativna greška, kao funkcija odnosa energija signala po bitu/spektralna gustina snage šuma.

2. MODEL SISTEMA

Signal na ulazu višenivoskog PSK prijemnika (slika 1) je

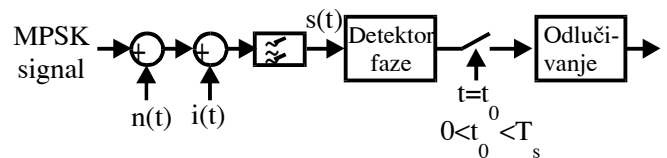
$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0), \quad 0 < t \leq T_s,$$

pri čemu je T_s trajanje jednog simbola, a

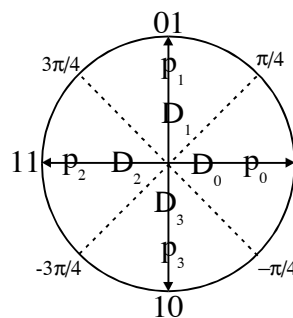
$$\phi_0 \in \left\{ 0, \frac{2\pi}{M}, \frac{4\pi}{M}, \dots, \frac{2(M-1)\pi}{M} \right\}.$$

Konstelacioni dijagrami koji odgovaraju ovom signalu za slučaj kodovanja Grayovim kodom, za QPSK, 8PSK i 16PSK modulacione formate, prikazani su na slikama 2, 3 i 4.

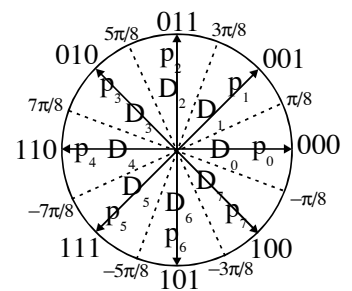
Treba zapaziti da se susedni simboli (kodne reči) razlikuju samo na jednoj bitskoj poziciji.



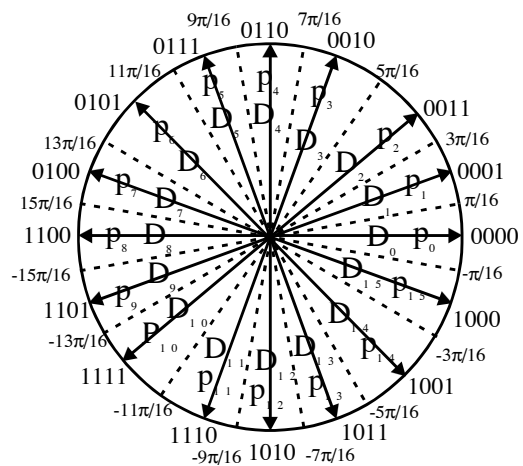
Slika 1. Model sistema



Slika 2. Konstelacioni dijagram za QPSK



Slika 3. Konstelacioni dijagram za 8PSK



Slika 4. Konstelacioni dijagram za 16PSK

Sem korisnog signala, na ulazu u prijemnik prisutni su Gaussov šum nulte srednje vrednosti i varijanse σ^2 , kao i kanalna interferencija oblika

$$i(t) = A_i \cos(\omega_0 t + \theta_i(t)),$$

pri čemu je A_i konstanta, a $\theta_i(t)$ je slučajna veličina uniformno raspodeljena na polusegmentu $(-\pi, \pi]$, [4-5]. Dakle, signal na ulazu u prijemnik je oblika

$$s_i(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0) + A_i \cos(\omega_0 t + \theta_i(t)) + n(t),$$

Pošto su noseće učestanosti korisnog signala i kanalne interferencije iste i jednake centralnoj učestanosti filtera

propusnika opsega učestanosti u prijemniku, čija je uloga da selektuje korisni signal (propusni opseg ovog filtera je od $\omega_0 - B/2$ do $\omega_0 + B/2$, pri čemu je $B \ll \omega_0$), i korisni signal i interferencija prolaze kroz ovaj filter, a Gaussov šum na izlazu postaje uskopojasni Gausov šum sa kvadraturnim komponentama ($x(t)$, $y(t)$), tako da je signal na izlazu ovog filtera oblika

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0) + A_i \cos(\omega_0 t + \theta_i(t)) + x(t) \cos(\omega_0 t) - y(t) \sin(\omega_0 t).$$

Ovaj filtrovani signal se može zapisati u obliku

$$s(t) = r(t) \cos(\omega_0 t + \gamma(t)),$$

gde su rezultujuća anvelopa $r(t)$ i faza $\gamma(t)$ dati pomoću

$$r(t) = \left((A \cos \phi_0 + A_i \cos \theta_i(t) + x(t))^2 + (A \sin \phi_0 + A_i \sin \theta_i(t) + y(t))^2 \right)^{1/2},$$

$$\tan(\gamma(t)) = \frac{A \sin \phi_0 + A_i \sin \theta_i(t) + y(t)}{A \cos \phi_0 + A_i \cos \theta_i(t) + x(t)}.$$

Funkcija gustine raspodele verovatnoće faze signala je, [4],

$$p(\gamma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{A^2 + A_i^2}{2\sigma^2}} \cdot \int_0^\infty r e^{\frac{r^2 - 2Ar \cos \gamma}{2\sigma^2}} I_0 \left(\frac{A_i}{\sigma^2} \sqrt{r^2 + A^2 - 2Ar \cos \gamma} \right) dr \quad (1)$$

Pretpostavljajući da je amplituda korskog signala A jednaka jedinici, varijansa σ^2 u prethodnom izrazu može se izraziti u funkciji od odnosa energija signala po bitu/spektralna gustina snage šuma pomoću

$$\sigma^2 = \left(2 \log_2(M) 10^{\frac{E_b/N_0(dB)}{10}} \right)^{-1}.$$

3. TAČNA VREDNOST VEROVATNOĆE GREŠKE PO BITU

Izvođenje formule za računanje verovatnoće greške po bitu u slučaju detekcije MPSK signala u prisustvu belog Gaussovog šuma i kanalne interferencije biće detaljno objašnjeno za QPSK modulacioni format. Situacija pri odlučivanju ilustrovana je na slici 5. Skup od M mogućih elementarnih signala može se opisati skupom od M fazora koji su ekvidistantni u kompleksnoj ravni (slike 2, 3, 4 i 5). Pošto je Grayov kod linearan (ne favorizuje ni jednu ulaznu ili izlaznu reč), može se pretpostaviti da je poslat fazor čija je početna faza $\phi_0=0$, koji je kodovan sa 00 (slika 5). Zbog dejstva šuma (koji ima dve komponente, u fazi i u kvadraturi sa signalom) i kanalne intererencije, menjaju se i faza i amplituda poslatog fazora, tako da primljeni fazor koji treba da bude detektovan zaklapa ugao γ sa poslatim fazorom. Isprekidane linije koje su ucrtane simetrično između fazora na predaji, predstavljaju pragove odlučivanja. Ako u trenutku

odlučivanja izmerena vrednost faze primljenog fazora leži u datoj oblasti odlučivanja, onda odlučivač donosi odluku da je poslata ona početna faza koja odgovara početnoj fazi fazora na simetrali date oblasti. Ne treba zaboraviti da su fazori sa početnim fazama $0, \pi/2, \pi$ i $3\pi/2$ kodovani, redom sa 00, 01, 11 i 10. Verovatnoće p_0, p_1, p_2 i p_3 označene na slikama 2 i 5 imaju sledeći smisao: p_0 je verovatnoća da primljeni fazor bude u oblasti D_0 , tj. to je verovatnoća da nema greške ni na jednoj poziciji u kodnoj reči Grayovog koda dužine 2; p_1 je verovatnoća da primljeni fazor bude u oblasti D_1 , tj. to je verovatnoća da je greška na jednom bitu; p_2 je verovatnoća da primljeni fazor bude u oblasti D_2 tj. to je verovatnoća da je greška na oba bita; p_3 je verovatnoća da primljeni fazor bude u oblasti D_3 , tj. to je verovatnoća da je greška na jednom bitu. Dakle, može se formirati sledeća tabela:

Tabela 1. QPSK

Broj grešaka (k)	Verovatnoća ($P(k)$)
0	p_0
1	p_1+p_3
2	p_2

Srednji broj grešaka u jednoj kodnoj reči dužine dva je

$$P_{SQPSK} = \sum_k kP(k) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (p_1 + p_3) + 2 \cdot p_2.$$

Da bi našli srednji broj grešaka po bitu prethodna vrednost P_{SQPSK} treba da se podeli sa dužinom kodne reči, tako da je verovatnoća greške po bitu

$$P_b = 0.5 P_{SQPSK} = 0.5(p_1 + p_3) + p_2.$$

S obzirom na oblik funkcije gustine raspodele verovatnoće $p(\gamma)$ (izraz (1)), koja je bitna pri odlučivanju, sledi da je

$$P_b = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} p(\gamma) d\gamma + 2 \int_{3\pi/4}^{\pi} p(\gamma) d\gamma. \quad (2)$$

U slučaju 8PSK modulacionog formata, potpuno sličnim postupkom može se formirati tabela 2, slična onoj kod QPSK modulacionog formata,

Tabela 2. 8PSK

Broj grešaka (k)	Verovatnoća ($P(k)$)
0	p_0
1	$p_1+p_3+p_7$
2	$p_2+p_4+p_6$
3	p_5

na osnovu koje se računa verovatnoća greške po bitu

$$P_b = \frac{1}{3} \sum_k kP(k) = \frac{1}{3} (0 \cdot p_0 + 1 \cdot (p_1 + p_3 + p_7) + 2(p_2 + p_4 + p_6) + 3p_5)$$

tj.

$$P_b = \frac{2}{3} \left(\int_{\pi/8}^{\pi} p(\gamma) d\gamma + \int_{-\pi}^{-3\pi/8} p(\gamma) d\gamma \right). \quad (3)$$

U slučaju 16PSK modulacionog formata formirana je tabela 3,

Tabela 3. 16PSK

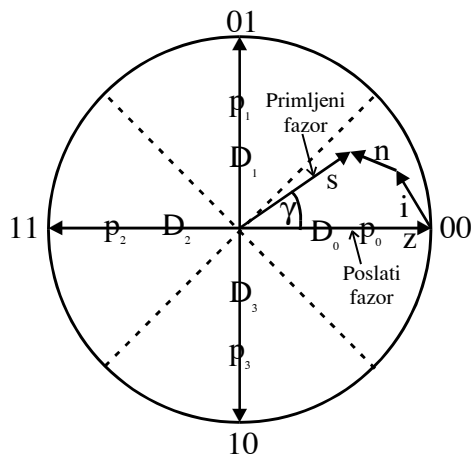
Broj grešaka (k)	Verovatnoća ($P(k)$)
0	p_0
1	$p_1+p_3+p_7+p_{15}$
2	$p_2+p_4+p_6+p_8+p_{12}+p_{14}$
3	$p_5+p_{11}+p_{13}+p_9$
4	p_{10}

na osnovu koje je izvedena verovatnoća greške po bitu

$$P_b = \frac{1}{4} \sum_k k P(k),$$

$$P_b = \frac{1}{4} (0 \cdot p_0 + 1 \cdot (p_1 + p_3 + p_7 + p_{15}) + 2 \cdot (p_2 + p_4 + p_6 + p_8 + p_{12} + p_{14}) + 3 \cdot (p_5 + p_{11} + p_{13} + p_9) + 4 p_{10})$$

$$P_b = \frac{1}{2} \left(\int_{\pi/16}^{\pi} p(\gamma) d\gamma + \int_{-\pi}^{-15\pi/16} p(\gamma) d\gamma + \int_{3\pi/16}^{15\pi/16} p(\gamma) d\gamma + \int_{9\pi/16}^{13\pi/16} p(\gamma) d\gamma \right) \quad (4)$$



Slika 5. Situacija pri detekciji QPSK signala

4. PRIBLIŽNA VREDNOST VEROVATNOĆE GREŠKE PO BITU

Približna verovatnoća greške po bitu se računa na sledeći način. Opet pretpostavimo da je poslat fazor čija je početna faza jednaka nuli. Uz pretpostavku da deluju šum i kanalna interferencija, verovatnoća da primljeni fazor ne bude u oblasti odlučivanja D_0 je

$$P_{es} = 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} p(\gamma) d\gamma. \quad (5)$$

Ovo je zapravo verovatnoća greške po simbolu. Približna vrednost verovatnoće greške po bitu se dobija kad se ova verovatnoća greške po simbolu podeli sa brojem bita kojim je kodovan simbol

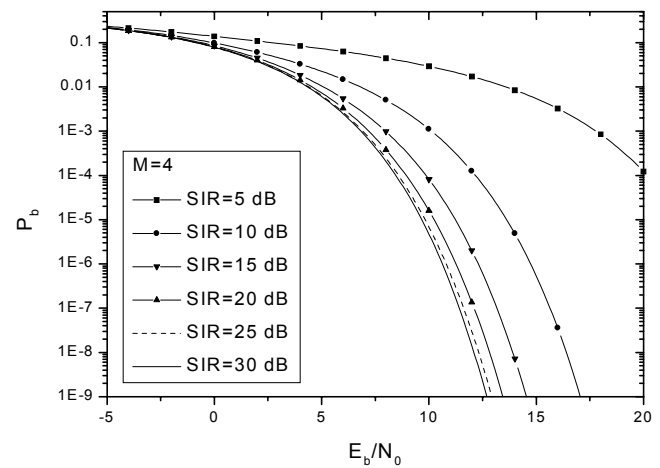
$$P_{ba} = P_{es} / \log_2 M. \quad (6)$$

Relativna greška između prave i približne verovatnoće greške po bitu je

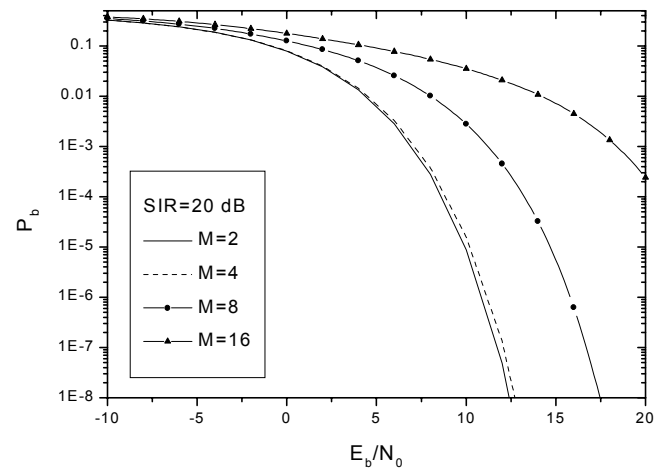
$$d = (P_b - P_{ba}) / P_b. \quad (7)$$

5. NUMERIČKI REZULTATI

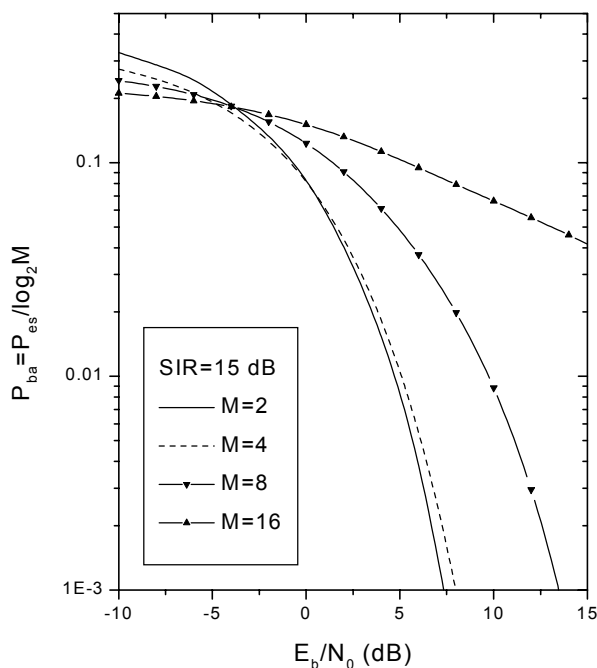
Korišćenjem izraza (1), (2), (3) i (4) na slikama 6 i 7 prikazane su zavisnosti verovatnoće greške po bitu P_b od odnosa energija signala po bitu/spektralna gustina snage šuma E_b/N_0 za različite vrednosti broja nivoa M i odnosa signal/interferencija $SIR=A/A_i$, a na slici 8 su prikazani rezultati dobijeni primenom izraza (5), (6) i (1). Na slici 8 su data poređenja pravih i približnih vrednosti verovatnoće greške po bitu.



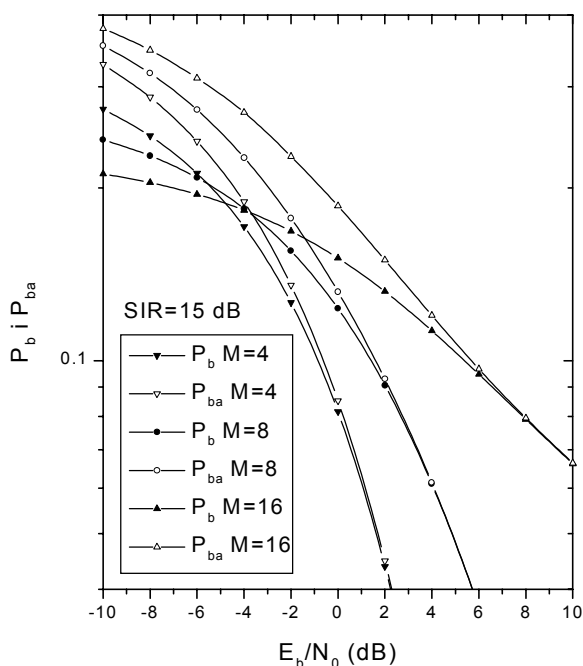
Slika 6. Zavisnost prave verovatnoće greške po bitu za različite vrednosti odnosa signal/interferencija i stalnu vrednost broja nivoa



Slika 7. Zavisnost prave verovatnoće greške po bitu za različite vrednosti broja nivoa i stalnu vrednost odnosa signal/interferencija



Slika 8. Zavisnost približne verovatnoće greške po bitu za različite vrednosti broja nivoa i stalnu vrednost odnosa signal/interferencija



Slika 9. Poređenje pravih i približnih vrednosti verovatnoće greške po bitu za različite vrednosti broja nivoa

6. ZAKLJUČAK

Za stalne vrednosti odnosa signal/interferencija SIR i odnosa energija signala po bitu/spektralna gustina snage šuma E_b/N_0 , relativna greška između prave i približne vrednosti verovatnoće greške po bitu d , data izrazom (7), raste sa povećanjem broja nivoa M (što se vidi sa slike 9 za male vrednosti E_b/N_0). Recimo, za $SIR=15$ dB i $E_b/N_0=-10$ dB, d je: 44.15% za $M=16$; 31.45% za $M=8$; 16.39% za $M=4$.

Takođe se može zaključiti da relativna greška d opada sa porastom E_b/N_0 i za velike vrednosti E_b/N_0 teži ka nuli. U

slučaju kada je $SIR=15$ dB, d je manje od 1% za $E_b/N_0 \geq 8$ dB ako je $M=16$; odnosno za $E_b/N_0 \geq 4$ dB ako je $M=8$.

Sa slike 8 treba zapaziti anomaliju koja se javlja pri malim odnosima E_b/N_0 , a ogleda se u tome da je verovatnoća greške po bitu manja za veće M , što znači da približan izraz za verovatnoću greške po bitu dat formulom (6) ne treba primenjivati za male vrednosti E_b/N_0 .

Vrlo slični zaključci važe i za druge vrednosti SIR .

Dakle, sem za vrlo male vrednosti E_b/N_0 , koje uglavnom nisu od značaja za praksu, pri detekciji višenivoskog fazno-modulisiranog signala u prisustvu kanalne interferencije i Gaussovog šuma vrednosti približne verovatnoće greške po bitu, koje se dobijaju kada se verovatnoća greške po simbolu podeli brojem bita kojim je kodovan simbol, su dosta bliske vrednostima prave verovatnoće greške po bitu.

LITERATURA

- [1] I. Korn, L. M. Hii, "Relation Between Bit and Symbol Error Probabilities for DPSK and FSK with Differential Phase Detection", *IEEE Transactions on Communications*, pp. 2778-2780, Vol. 42, No. 10, October 1994.
- [2] I. Korn, "Relation Between Bit and Symbol Error Probabilities for FSK with LDI Detection", *IEEE Transactions on Communications*, pp. 2512-2514, Vol. 42, No. 8, August 1994.
- [3] P. Ivaniš, "Izračunavanje verovatnoće greške po bitu kod M-PSK i M-QAM korišćenjem konstelacionog dijagrama", *Zbornik radova VII telekomunikacionog foruma (TELFOR '99)*, Beograd, 1999.
- [4] I. Kostić, "Uticaj interferencije na verovatnoću greške digitalnih fazno-modulisanih signala u telekomunikacionom sistemu sa više repetitora", *Doktorska disertacija*, Elektrotehnički fakultet u Beogradu, Beograd, 1981.
- [5] J. Wang, A. Yongacoglu, "Performance of Trellis Coded-8PSK with Cochannel Interference", *IEEE Transactions on Communications*, pp. 6-10, Vol. 42, NO. 1, January 1994.
- [6] G. Lukatela, *Statistička teorija telekomunikacija i teorija informacija*, Građevinska knjiga, Beograd, 1981.

Abstract - The paper presents the procedure for determining the exact value of the bit error probability in detecting multilevel phase shift keying (M -ary PSK, $M \geq 2$) Gray coded signals transmitted over a Gaussian channel in the presence of the cochannel interference. We also compute the approximate value of the bit error probability that is obtained by the symbol error probability divided by the number of bits in a symbol. On the basis of the comparison among exact and approximate values of the bit error probability we conclude when this approximation is valid.

ERROR PROBABILITY DURING TRANSMISSION OF MPSK SIGNAL OVER A GAUSSIAN CHANNEL IN THE PRESENCE OF COCHANNEL INTERFERENCE

Goran T. Đorđević, Milan S. Milošević,
Milan S. Marković, Dragiša Č. Zlatković